

Fernando Rodrigo Rago

*Desenvolvimento de Software para Projeto de
Células de Carga Baseadas em Extensômetros*

São Paulo

2008

Fernando Rodrigo Rago

*Desenvolvimento de Software para Projeto de
Células de Carga Baseadas em Extensômetros*

Trabalho de formatura do curso de graduação do Departamento de Engenharia Mecatrônica da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Orientador:
Prof. Dr. Emílio Carlos Nelli Silva

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

São Paulo

2008

Resumo

Células de carga são sensores de alta precisão que servem para medir forças e torques, e sua utilização cresce até hoje em várias áreas da Engenharia, sendo encontrada numa infinidade de formas e para diferentes aplicações. Grande parte dos robôs utilizados hoje necessita de alta flexibilidade nas tarefas que podem executar e com isso seu controle requer uso de um sensor acurado que responda rapidamente às reações, o que aumenta a necessidade da melhora na eficiência dos sensores. No aumento da eficiência das células de carga podem ser encontrados diversos problemas, principalmente quando se trata de uma célula de carga que mede grandezas em mais de uma dimensão. Para este caso a célula de carga pode possuir uma geometria não intuitiva e seus graus de liberdade desacoplados ou uma geometria simples que requer um esforço extra para interpretação dos sinais de leitura. Procurando melhorar a eficiência da célula de carga e ampliando o seu sinal de saída, este trabalho busca a geometria não intuitiva que facilita a aquisição dos sinais e sua leitura.

Visando a obtenção e análise desta geometria mais eficiente são utilizados métodos matemáticos e programação computacional, assim este trabalho propõe a utilização do Método de Otimização Topológica (MOT), que alia o Método de Elementos Finitos (MEF), uma técnica de análise numérica muito utilizada na Engenharia, à Otimização Topológica (OT), método poderoso de otimização estrutural, para obter uma geometria otimizada para células de carga.

Abstract

Load cells are high precision sensors that measure forces and torques, and its utilization grows until actual days in many uses and engineering areas for different applications. Nowadays many robots need high flexibility in their task and its control requires an accurate sensor that quickly responds to reactions, which increases the need of elevating the sensor's efficiency. Many problems can be found when increasing the load cell efficiency. The load cell topology may not be intuitive having its degrees of freedom decoupled or a single topology which demands extra effort for signal reading. Targeting the increasing of load cell's efficiency and signal reading this work aims to obtain the not intuitive topology which requires less effort for signal reading. Mathematical methods and computational programming are used to analyse and obtain that efficient topology. This work proposes the use of the Topology Optimization Method (TOM) that allies the Finite Element Method (FEM), numerical analysis technique much used one Engineering, with the Topology Optimization, strong structural optimization method, aiming find the load cell optimized topology.

Sumário

Lista de Figuras

1	Introdução	p. 8
1.1	Célula de Carga	p. 8
1.2	Extensômetros	p. 9
1.3	Projeto de Células de Carga	p. 10
2	Objetivos e Justificativa	p. 12
3	Fundamentos Teóricos	p. 13
3.1	Extensômetros	p. 13
3.2	Ponte de “Wheatstone”	p. 16
3.3	Método dos Elementos Finitos - MEF	p. 17
3.3.1	Discretização por Elementos Finitos	p. 17
3.3.2	Elemento Isoparamétrico de 4 nós	p. 18
3.3.3	MEF Aplicado à Mecânica dos Sólidos	p. 21
3.4	Método de Otimização Topológica - MOT	p. 23
3.4.1	Formulação do Problema de OT	p. 24
3.5	Cálculo da Sensibilidade da Função Objetivo	p. 25
3.5.1	Sensibilidade da Ponte de Wheatstone	p. 25
3.6	Instabilidade de Tabuleiro	p. 28
4	Estrutura do Software	p. 30

4.1	Leitura dos Dados Iniciais	p. 30
4.1.1	Pré-Cálculo da Matriz de Rigidez	p. 32
4.2	Resolução do MEF	p. 32
4.3	Cálculo da Função Objetivo e Convergência	p. 32
4.4	Simplex	p. 33
5	Resultados	p. 34
5.1	Exemplo 1	p. 34
5.2	Exemplo 2	p. 36
5.3	Exemplo 3	p. 38
5.4	Exemplo 4	p. 40
5.5	Exemplo 5	p. 41
5.6	Exemplo 6	p. 43
5.7	Exemplo 7	p. 45
5.8	Exemplo 8	p. 46
5.9	Exemplo 9	p. 48
6	Conclusões	p. 50
	Referências	p. 51

Lista de Figuras

1	Emprego de células de carga na robótica	p. 8
2	Célula de carga baseada em extensômetros	p. 9
3	Extensômetro	p. 10
4	Célula de carga - Alfa Instrumentos	p. 11
5	Eixo condutor metálico	p. 13
6	Gráfico de tensão VS deformação, Lei de Hooke	p. 14
7	Estrutura simples de um extensômetro representado como treliça	p. 15
8	Circuito em ponte de “Wheatstone”	p. 16
9	Elemento retangular	p. 19
10	Coordenadas naturais	p. 19
11	Ilustração do problema da “instabilidade do tabuleiro” numa estrutura .	p. 28
12	Fluxo do programa	p. 31
13	Exemplo 1 - Estado Inicial.	p. 35
14	Exemplo 1 - Vizualização passo a passa da obtenção do resultado da OT.	p. 35
15	Exemplo 1 - Gráficos da função objetivo (a), volume total ocupado (b) e flexibilidade média da estrutura (c).	p. 36
16	Exemplo 2 - “Exemplo 1” com a utilização de filtro.	p. 37
17	Exemplo 2 - Função objetivo.	p. 37
18	Exemplo 2 - Flexibilidade média.	p. 38
19	Exemplo 3 - Funções objetivo. Variação relativa de 0,01% (à esquerda) e variação relativa de 1% (à direita).	p. 39

20	Exemplo 3 - Resultados finais. Variação relativa de 0,01% (à esquerda) e variação relativa de 1% (à direita).	p. 39
21	Exemplo 4 - Função objetivo (à esquerda) e resultado final (à direita). .	p. 40
22	Exemplo 5 - Passos intermediários da obtenção do resultado de OT. . .	p. 41
23	Exemplo 5 - Resultado final da OT.	p. 42
24	Exemplo 5 - Gráficos da função objetivo (a), flexibilidade média (b) e módulo do potencial elétrico de saída (c).	p. 42
25	Exemplo 6 - Resultado final da OT.	p. 43
26	Exemplo 6 - Gráficos da função objetivo (a), flexibilidade média (b) e módulo do potencial elétrico de saída (c).	p. 44
27	Exemplo 7 - Resultado final da OT.	p. 45
28	Exemplo 7 - Gráficos da função objetivo (a) e flexibilidade média (b). .	p. 45
29	Exemplo 8 - Resultado final da OT.	p. 47
30	Exemplo 8 - Gráficos da função objetivo (a), flexibilidade média (b) e módulo do potencial elétrico de saída (c).	p. 47
31	Exemplo 9 - Resultado final da OT.	p. 48
32	Exemplo 9 - Gráficos da função objetivo (a), flexibilidade média (b) e módulo do potencial elétrico de saída (c).	p. 49

1 *Introdução*

1.1 Célula de Carga

Células de carga são sensores de alta precisão que servem para medir forças e torques. Criados no fim da década de 1930, sua utilização cresce até hoje em várias áreas da Engenharia e são encontrados numa infinidade de formas e aplicações.

Na robótica é possível encontrar vários exemplos interessantes onde o uso de células de carga é empregado, como nos exemplos mostrado na figura 1. A figura à esquerda, trata-se de um robô que corrige o posicionamento de peças que devem ser encaixadas em furos, tornando mais suave e menos forçado o processo, e à direita um braço de robô foi construído na tentativa de imitar um braço humano. A célula de carga aqui possibilita controlar as cargas aplicadas pelos atuadores das mãos quando manuseiam objetos.

As células de carga aqui tratadas consistem em extensômetros fixados numa estrutura mecânica planejada para receber esforços e deformar-se dentro do regime elástico. As células de carga podem ser empregadas em medições de outras grandezas além de forças e torques, para isso somente é preciso relacionar a grandeza a ser medida com a deformação que a célula de carga sofre.



Figura 1: Emprego de células de carga na robótica



Figura 2: Célula de carga baseada em extensômetros

Extensômetros, conhecidos em inglês como "*strain gauges*", são sensores que apresentam uma alteração na sua impedância quando são submetidos a uma tensão mecânica em uma direção preferencial. São compostos de uma finíssima camada condutora depositado sobre um material isolante, como mostrado na figura (3). Em uma célula de carga o extensômetro é fixado sobre a estrutura mecânica da célula que, quando submetida a uma carga, se deforma, alterando o comprimento do extensômetro e conseqüentemente alterando sua impedância.

Atualmente poucos trabalhos sobre modelagem e desenvolvimento de células de carga podem ser encontrados; alguns utilizam essencialmente ferramentas matemáticas analíticas como MEF (Método de Elementos Finitos) numa tentativa de realizar uma otimização do transdutor ou de solucionar problemas clássicos mais conhecidos como, por exemplo, desacoplar graus de liberdade de uma célula de carga sensível a mais de uma direção de componente de força.

1.2 Extensômetros

Como dito, as tensões mecânicas na estrutura decorrentes de cargas aplicadas sobre ela deformam o extensômetro, e conhecendo as propriedades do material é possível estudar seu comportamento. As tensões mecânicas podem ser calculadas levando em conta as deformações e a orientação geométrica da estrutura em relação ao extensômetro. Assim depende-se apenas da deformação da estrutura e do tipo de material para medir a carga aplicada sobre o extensômetro. Este sensor pode ser utilizado para estudar outros parâmetros físicos, como pressão, deslocamento, aceleração ou vibração.

A geometria dos extensômetros, bem como a posição em que são fixados, varia de acordo com a precisão requerida, grau de proteção com o ambiente e fidelidade de medidas a médio e longo prazo. Os extensômetros podem ser simples adesivos. Em alguns casos eles

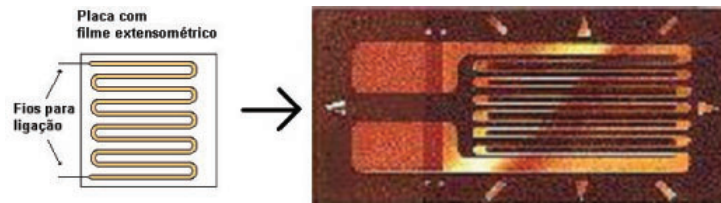


Figura 3: Extensômetro

podem ser instalados em tão pouco tempo que não chega ser necessária a compensação térmica. As saídas obtidas não serão valores absolutos e precisam ser interpretadas e relacionadas com a deformação.

Uma célula de carga sendo um sensor constituído de um extensômetro preso a uma estrutura flexível, tem sua eficiência diretamente ligada à deformação sofrida pela estrutura e conseqüentemente à forma da estrutura.

1.3 Projeto de Células de Carga

Cada vez mais a necessidade de sensores tem crescido em algumas áreas como as que lidam com controle de robôs ou monitoramento de estruturas. Grande parte dos robôs utilizados hoje necessita de alta flexibilidade nas tarefas que podem executar e com isso seu controle acaba necessitando de um sensor acurado que responda rapidamente às reações como as células de carga. Isso torna importante a necessidade do aumento da qualidade dos sensores, mas este aumento de qualidade pode encontrar diversos problemas, principalmente quando se trata de um sensor que mede grandezas em mais de uma dimensão.

Dentro da robótica foi desenvolvida uma variedade destes sensores, e basicamente eles podem ser divididos em três grupos de acordo com seu posicionamento em relação à ferramenta: sensores de base (“base force sensor”), sensores de mesa, (“table force sensor”) e sensores de pulso (“wrist force sensor”). Estes sensores ainda são divididos quanto a sua matriz de calibração: mecanicamente acoplados, são sensores que possuem uma estrutura simples com uma matriz complexa de ser obtida; ou mecanicamente desacoplados, são sensores que possuem uma estrutura complexa com uma simples matriz de calibração.

Assim sua geometria pode ser complexa demais ou a leitura e interpretação dos sinais dos seus extensômetros necessita de um esforço extra para ser interpretada. Procurando melhorar a eficiência do sensor, diminuindo seu tempo de resposta e também ampliando o

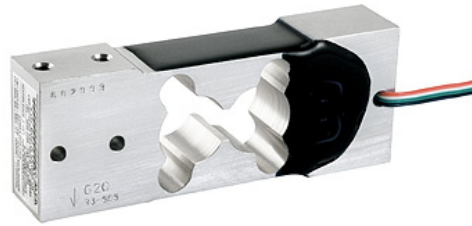


Figura 4: Célula de carga - Alfa Instrumentos

seu sinal de saída, é preferida uma geometria complexa (mecanicamente desacoplada) que facilite a aquisição dos sinais e sua leitura. Visando a obtenção e análise desta geometria é conveniente a utilização de métodos matemáticos e programação computacional para desenvolver um software que execute o projeto sistemático dessa geometria.

Alguns métodos foram propostos na literatura para alterar a geometria da estrutura de um sensor, os mais encontrados tratam de fazer alterações na sua forma ou na razão das suas dimensões simplesmente. Entretanto existe um método que visa encontrar uma forma melhor através da análise de cada ponto da estrutura, subtraindo massa onde ela é menos necessária e adicionando onde ela é mais necessária, este método é chamado de otimização topológica e será o método aqui utilizado.

Este trabalho propõe a utilização do Método de Otimização Topológica (MOT), que alia o Método de Elementos Finitos (MEF), uma técnica de análise numérica muito utilizada na Engenharia, à algoritmos de otimização estrutural, para obter uma solução sistemática para o problema, de forma a auxiliar o desenvolvimento da geometria do sensor, procurando aumentar sua eficiência e maximizando seu sinal de saída.

2 Objetivos e Justificativa

Neste trabalho será desenvolvido um software que visa encontrar o projeto otimizado de uma célula de carga, utilizando extensômetros, para medição de forças e torques. No projeto a eficiência da célula de carga deverá ser maximizada, projetando uma forma estrutural que obtenha o máximo sinal de saída sem um significativo comprometimento da rigidez mecânica do sensor.

Para tal utilizar-se-á o Método de Otimização Topológica que combina o Método de Elementos Finitos com algoritmos de otimização. O software deverá encontrar sistematicamente a geometria da célula de carga dada as condições de contorno.

Como já apresentado, células de carga são amplamente utilizadas na Engenharia. Seu desenvolvimento eficiente para cada caso específico é muito custoso devido à dificuldade de obtenção de formas que possibilitam a aquisição de dados para cada grau de liberdade de forma desacoplada. Assim este trabalho objetiva o desenvolvimento de um software que, utilizando o MOT, auxilie no desenvolvimento de projetos de células de carga numa grande variedade de casos de uso, sistematicamente convergindo para uma resposta otimizada dadas condições de contorno de acordo com a aplicação.

3 Fundamentos Teóricos

3.1 Extensômetros

É possível mostrar que medições de deformação, tensão, força e torque estão intimamente relacionados. Antes, deve-se entender que a medição de tensão é feita mediante uma medição de deformação, e as duas podem ser relacionadas através da lei de Hooke. Sabendo que o torque pode ser medido conhecendo a força aplicada e a distância de seu ponto de aplicação até o centro de rotação da estrutura, basta saber agora como é possível medir uma força.

É possível definir a tensão como a razão da força aplicada pela área onde ela atua. A deformação pode ser entendida como a variação do tamanho de um objeto em relação ao seu tamanho natural pela aplicação de uma carga sobre ele. Imagine um eixo, figura 5, de seção transversal de área A e comprimento L , sujeita a uma carga uniaxial “ F ” na direção do seu comprimento, fazendo o comprimento da barra variar de δL . A tensão a qual a barra está sujeita é expressa por, $\sigma = \frac{F}{A}$, e a deformação por $\varepsilon = \frac{\delta L}{L}$.

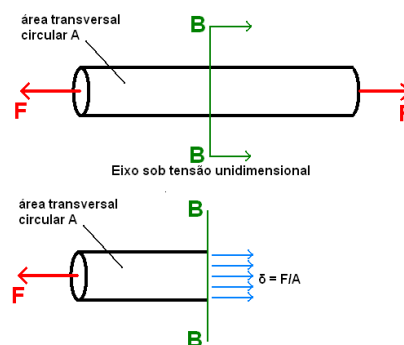


Figura 5: Eixo condutor metálico

A lei de Hooke que relaciona a tensão com a deformação é dada por $\sigma = E\varepsilon$, sendo E o módulo de elasticidade do material da barra, também conhecido como módulo de Young. A lei de Hooke estabelece uma relação linear entre a tensão e a deformação, mas

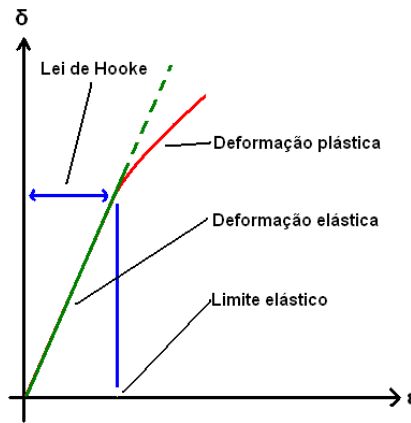


Figura 6: Gráfico de tensão VS deformação, Lei de Hooke

veja que ela não pode ser usada para valores relativamente altos de tensão, onde ocorreria deformação plástica do material, como mostra a figura 6.

Um extensômetro em si mede deformações e consiste numa pequena superfície metálica depositada sobre um corpo que estará sujeito a cargas. A deformação do extensômetro é medida pela variação da resistência do condutor metálico causada pela deformação.

A resistência elétrica (R) do condutor pode ser calculada por:

$$R = \frac{\rho L}{A} \quad (3.1)$$

Diferenciando a equação anterior e dividindo todos seus termos por R :

$$\frac{\delta R}{R} = \frac{\delta \rho}{\rho} + \frac{\delta L}{L} - \frac{\delta A}{A} \quad (3.2)$$

A equação obtida relaciona a variação da resistência elétrica com a variação da resistividade, com a deformação axial condutor e com a variação de área da seção transversal. Sendo possível demonstrar que $\frac{\delta A}{A}$ e $\frac{\delta L}{L}$ estão relacionados, é possível descobrir a deformação de um condutor metálico através da medição da variação da sua resistência com a aplicação de um carregamento. Veja então como é relacionada a deformação axial de um condutor circular com a sua variação da área da seção transversal.

Como a área depende apenas do diâmetro da seção, o termo $\frac{\delta A}{A}$ pode ser escrito como:

$$\frac{\delta A}{A} = \frac{2\delta D}{D} = 2\varepsilon_t \quad (3.3)$$

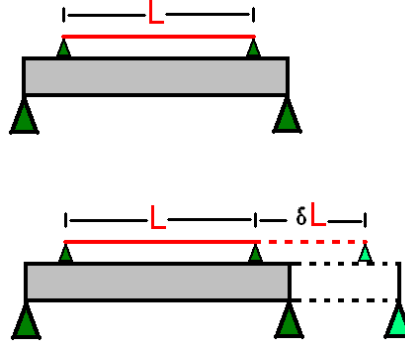


Figura 7: Estrutura simples de um extensômetro representado como treliça

onde ε_t é a deformação transversal do condutor. Lembrando que o material está sob carregamento somente na direção do seu comprimento, é possível relacionar a variação transversal com a axial. A razão entre a deformação transversal e a axial é chamada de Módulo de Poisson (ν). O Módulo de Poisson também é uma propriedade que depende somente do material condutor.

$$\nu = -\frac{\text{Def. Transversal}}{\text{Def. Axial}} = -\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_a} \quad (3.4)$$

Assim relaciona-se a variação da resistência elétrica do condutor com a deformação axial.

$$\frac{\delta R}{R} = \frac{\delta \rho}{\rho} + \varepsilon_a - 2\varepsilon_t \quad (3.5)$$

$$\frac{\delta R}{R} = \frac{\delta \rho}{\rho} + \varepsilon_a(1 + 2\nu) \quad (3.6)$$

Deveriam ainda ser consideradas as variações relativas de resistividade e do módulo de Poisson, mas verifica-se que estas influências não são significativas no caso do extensômetro constituído de uma fina camada de metal se o material não estiver submetido a carregamentos extremos (como oscilação de alta frequência que pode resultar em um aumento de temperatura).

Comercialmente os extensômetros são ofertados e classificados por uma constante, k_{ext} , definida como a razão entre a variação relativa da resistência elétrica e a deformação axial, ou seja:

$$\frac{\frac{\delta R}{R}}{\varepsilon_a} = \frac{\delta R}{R\varepsilon_a} = k_{ext} \quad (3.7)$$

$$R_{ext} = R_0(1 + k_{ext}\varepsilon) \quad (3.8)$$

Sendo R_{ext} a resistividade do extensômetro, k_{ext} a constante que relaciona a deformação com a variação de resistividade, valor típico fornecido pelo fabricante.

3.2 Ponte de “Wheatstone”

O extensômetro deve ser instalado no material que sofrerá o carregamento, como a estrutura da célula de carga, e ligado a um circuito eletrônico em ponte de “Wheatstone”. O principal motivo dessa estrutura é amplificar o sinal, e um exemplo dela é ilustrado na figura 8.

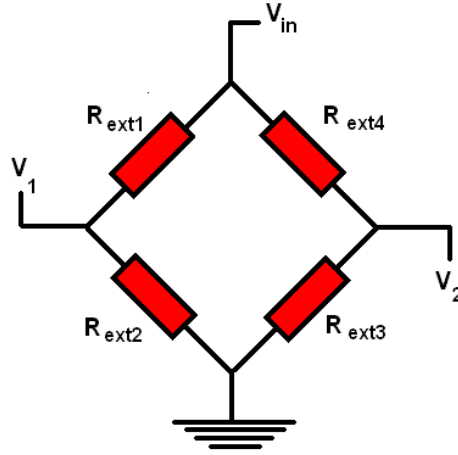


Figura 8: Circuito em ponte de “Wheatstone”

Na ponte de “Wheatstone” a variação da resistividade dos extensômetros é medida pela variação da diferença de potencial $V_2 - V_1$, a qual se chamará de V_{out} , que é a saída da célula de carga a ser maximizada. Dado V_{in} , a tensão fornecida a ponte de “Wheatstone”, é possível calcular V_{out} :

$$V_1 = i_1 R_{ext} \quad (3.9)$$

$$V_2 = i_2 R \quad (3.10)$$

$$i_1 = i_2 = \frac{V_{in}}{(R + R_{ext})} \quad (3.11)$$

$$V_1 = \frac{V_{in} R_{ext}}{(R + R_{ext})} \quad (3.12)$$

$$V_2 = \frac{V_{in}R}{(R + R_{ext})} \quad (3.13)$$

$$V_{out} = V_2 - V_1 = \frac{V_{in}(R_{ext} - R)}{(R + R_{ext})} \quad (3.14)$$

3.3 Método dos Elementos Finitos - MEF

O método dos elementos finitos é uma técnica de análise numérica muito utilizada na Engenharia para obter soluções de equações diferenciais que descrevem, ou aproximadamente descrevem, uma grande variedade de problemas físicos de diversos tipos como em sólidos, em fluidos, eletromagnéticos ou dinâmicos. O MEF permite a análise de estruturas que não podem ser resolvidas por métodos analíticos ou aqueles cuja solução é complicada demais. Sua atuação pode estender a estruturas de formato geométrico complexo, compostas de materiais não homogêneos, não lineares.

A idéia básica do método é subdividir um domínio complicado em uma série de pequenas regiões em que as equações diferenciais são "resolvidas" com certa aproximação. A montagem de um sistema matricial com as equações que regem cada uma destas regiões determina o comportamento do problema inicial.

Cada uma destas pequenas regiões é tratada como um *elemento*, e o processo de subdivisão do domínio em um finito número de elementos é chamado *discretização*. Os elementos estão conectados em pontos específicos ao longo dos limites dos elementos adjacentes.

3.3.1 Discretização por Elementos Finitos

Como fora dito, para utilizar o método de elementos finitos o domínio precisa ser discretizado em pequenas regiões chamadas de *elementos* e a solução pode ser determinada pelos valores discretizados de um campo de variáveis primárias, ϕ , nos nós, como por exemplo deslocamento nos eixos x, y e z. O número de variáveis desconhecidas no nó determina o grau de liberdade do nó. A seguir equações diferenciais serão aplicadas ao domínio de um simples elemento determinando seu comportamento. No nível de um elemento a solução de suas equações é aproximada por uma função contínua, estimando a distribuição de ϕ pelo domínio do elemento.

Uma vez que as equações dos elementos tenham sido determinadas, os elementos são unidos para formar o domínio original inteiro. A solução de ϕ para o problema torna-se

a aproximação chave expressa em termos dos valores nodais de ϕ . Como resultado se obtém um sistema matricial de equações resultante do processo de união dos elementos. Em problemas reais é comum que o tamanho do sistema seja de milhares de equações, sendo então necessário o uso de processamento computacional para encontrar a solução.

Como dito, inicialmente o problema será modelado pelo caso bidimensional onde a terceira dimensão é simplificada, admitida como unitária. Assim será utilizado o elemento isoparamétrico de 4 nós.

3.3.2 Elemento Isoparamétrico de 4 nós

Considere uma função interpoladora para um elemento retangular como observado na figura 9 onde U é a variável de estado, x e y são variáveis independentes e b_i os coeficientes da equação.

$$U(x, y) = b_1 + b_2x + b_3y + b_4xy \quad (3.15)$$

Sendo assim, os valores de cada deslocamento $U(x,y)$ nos pontos dos vértices do quadrilátero são:

$$U_i = b_1 \quad (3.16)$$

$$U_j = b_1 + b_2L \quad (3.17)$$

$$U_m = b_1 + b_2L + b_3W + b_4LW \quad (3.18)$$

$$U_n = b_1 + b_3W \quad (3.19)$$

e substituindo na equação geral, encontra-se:

$$U(x, y) = \begin{bmatrix} (1 - \frac{x}{L})(1 - \frac{y}{W}) & (\frac{x}{L})(1 - \frac{y}{W}) & (\frac{x}{L})(\frac{y}{W}) & (1 - \frac{x}{L})(\frac{y}{W}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_m \\ T_n \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

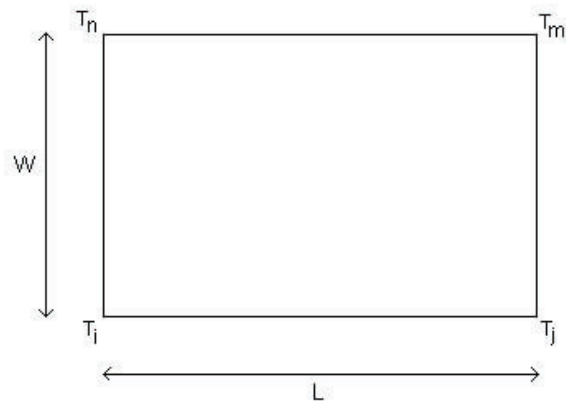


Figura 9: Elemento retangular

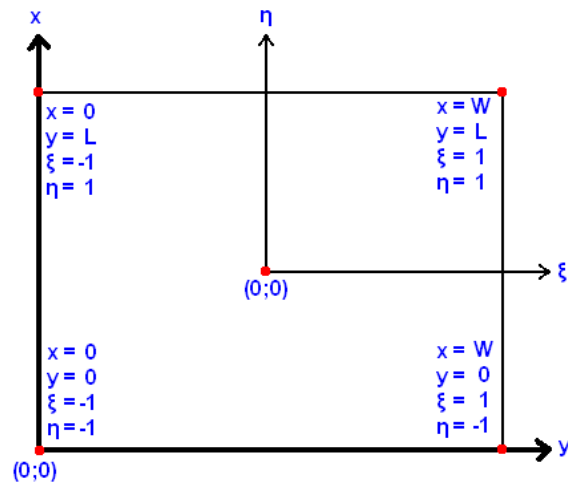


Figura 10: Coordenadas naturais

$$U(x, y) = \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_m & N_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_m \\ T_n \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Em geral uma função interpoladora é definida para um elemento retangular com um sistema de coordenadas no centro do elemento, sendo denominado sistema de coordenadas natural.

As coordenadas naturais serão definidas em relação a x e y através das seguintes equações:

$$\xi = \frac{2x}{L} - 1 \quad (3.22)$$

$$\eta = \frac{2y}{W} - 1 \quad (3.23)$$

e assim as funções interpoladoras ficam.

$$N_i = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \quad (3.24)$$

$$N_j = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \quad (3.25)$$

$$N_m = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \quad (3.26)$$

$$N_n = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \quad (3.27)$$

Dessa forma é possível descrever as coordenadas internas dos pontos em função das funções interpoladoras.

$$x = N_i x_i + N_j x_j + N_m x_m + N_n x_n \quad (3.28)$$

$$y = N_i y_i + N_j y_j + N_m y_m + N_n y_n \quad (3.29)$$

onde $x_i, x_j, \dots$ e $y_i, y_j, \dots$ são as coordenadas dos nós. O nome isoparamétrico vem da possibilidade de interpolar a grandeza de interesse pelas mesmas funções de forma que interpolam a posição dos pontos. Escrever as funções de forma em função de (x,y) é muito complicado, e por isso é usual escrever as funções através das coordenadas naturais do elemento (ξ, η) .

Derivando-se $U(x,y)$ em função das coordenadas naturais, tem-se:

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial \xi} = \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial \eta} = \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (3.31)$$

Ou na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial U(x,y)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial U(x,y)}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.32)$$

onde $[J]$ é chamado de Jacobiano da transformação de coordenadas.

3.3.3 MEF Aplicado à Mecânica dos Sólidos

Como já é conhecido, a relação entre a tensão mecânica e a deformação mecânica em um dado sólido é dada pela lei de Hooke que diz:

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \quad (3.33)$$

onde $\{\sigma\}$ é o vetor de tensões mecânicas e $\{\varepsilon\}$ o vetor de deformações mecânicas. Para o caso de um modelo de duas dimensões é suposto que as tensões ocorrem num plano do sólido, e o corpo é modelado com uma fatia onde sua terceira dimensão, a espessura, é tratada como unitária, e a equação da Lei de Hooke será dada por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

Utilizando a expressão da Lei de Hooke é possível agora obter a formulação das matrizes dos elementos em MEF que serão aplicadas na solução do problema. A obtenção da matriz de MEF mostrada a seguir será mostrada de uma forma simples e direta, porém menos formal, utilizar-se-á o conceito de energia. A energia de um dado elemento do MEF é dada como:

$$\Lambda^{(e)} = \frac{1}{2} \int_A \{\varepsilon\}^T [C] \{\varepsilon\} \delta A = \frac{1}{2} \{U^{(e)}\}^T [K^{(e)}] \{U^{(e)}\} \quad (3.35)$$

onde $\{U^{(e)}\}$ e $[K^{(e)}]$ são os deslocamentos nodais e a matriz de rigidez de um elemento respectivamente. Assim, para o cálculo da energia de um elemento isoparamétrico de 4 nós, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial U(x,y)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial U(x,y)}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = [J^{-1}] \begin{Bmatrix} \frac{\partial U(x,y)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial U(x,y)}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (3.36)$$

Dada uma célula de carga, com suas condições de contorno elétricas e mecânicas, aplicando a formulação de elementos finitos os deslocamentos são aproximados usando funções de forma e a relação entre a deformação e os deslocamentos nodais em cada

elemento pode ser dada pela equação seguinte, onde $[B]_e$ é um operador derivativo e $\{U\}_e$ é o vetor de deslocamentos nodais.

$$\{\varepsilon\}_e = [B]_e \{U\}_e \quad (3.37)$$

Para a formulação da matriz de rigidez dos elementos partir-se-á dos resultados obtidos no cálculo das funções interpoladoras N_{is} já descritas. A expressão da matriz de cada elemento é descrita em termos das coordenadas globais, e seu diferencial será expresso em termos do diferencial das coordenadas locais $d\xi$ e $d\eta$. Como visto a deformação é definida em função da derivada das funções de forma em coordenadas globais, e essas derivadas irão compor a matriz $[B]$ [3].

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Substituindo na equação 3.35 é possível mostrar que:

$$[K]_e = \int_{V_e} [B]^t [C] [B] dV_e \quad (3.39)$$

Mas, usando o jacobiano como um operador para transformar as coordenadas locais em globais (ver eqs. 3.30 e 3.31) pode-se escrever a equação acima como:

$$[K]_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^t [C] [B] \det(J) d\eta d\xi \quad (3.40)$$

Essencialmente dois problemas de elementos finitos devem ser considerados. O primeiro é o tradicional MEF mecânico, onde $[K]$ é a matriz de rigidez, $\{U\}$ é o vetor de deslocamentos nodais e $\{F\}$ é o vetor de carregamento nodal.

$$[K] \{U\} = \{F\} \quad (3.41)$$

O segundo problema trata-se do MEF elétrico, regido pela equação da ponte de “Wheatstone” neste caso. O extensômetro será modelado por um elemento de treliça, que no caso bidimensional terá seus limites fixos a dois nós consecutivos da malha do MEF mecânico, utilizando os deslocamentos nodais para calcular a sua deformação.

Em resumo o problema de MEF pode ser descrito como:

- Solução do MEF mecânico considerando as cargas aplicadas sobre a célula de carga.
- Cálculo da resistência equivalente dos extensômetros.
- Obtenção da saída pela equação da ponte de "Wheatstone".

A matriz de rigidez local é inserida numa matriz global $[K]$ através da conectividade de cada elemento (índice que guarda a informação dos nós que possuem os elementos). De posse da matriz $[K]$ é possível encontrar a solução das equações de equilíbrio dado pelo sistema 3.41. A avaliação das integrais utilizadas é feita numericamente utilizando-se da Quadratura Gaussiana e é provado que o valor da somatória obtida por este método representa a integral exata para um polinômio de grau máximo três.

3.4 Método de Otimização Topológica - MOT

A Otimização Topológica é um método poderoso de otimização estrutural. Ela é utilizada, por exemplo, no desenvolvimento de mecanismos flexíveis cujos movimentos são dependentes apenas de deformações elásticas, como sensores, micro-atuadores ou estruturas mecânicas otimizadas projetadas pra resistir esforços.

Antes de introduzir o OT é conveniente entender o conceito de Domínio Fixo Estendido (DFE). Entende-se por DFE o limite que consiste uma forma física fixa limitada por todo o volume que a estrutura ainda desconhecida é livre para ocupar. O objetivo da Otimização Topológica será determinar os espaços que devem possuir material e os que não devem possuir material dentro deste domínio físico, respeitando as condições limites determinadas de volume máximo e mantendo a conectividade da estrutura, determinando a distribuição ótima de acordo com a função objetivo determinada.

Na implementação numérica o domínio fixo estendido é discretizado pelo método dos elementos finitos, a densidade de cada elemento é uma variável e assim a distribuição de material no domínio fixo estendido é alterada a cada iteração. Uma vez que o domínio tenha sido discretizado ele não se altera, tornando a otimização um processo mais simples e rápido.

O método procura determinar, sistematicamente, a distribuição ótima de material que extremize a função objetivo da peça ao mesmo tempo em que respeita suas restrições

(como tensão limite para ocorrer deformação plástica, por exemplo). O MOT consiste então em um método computacional que permite projetar a topologia ótima de estruturas segundo certo critério de custo, como por exemplo, máxima rigidez e menor peso [4] [5]. Cada elemento discretizado pelo MEF é descrito pelas propriedades de seu material, sua forma e sua ligação com outro elemento discretizado. A topologia é determinada adicionando ou removendo material de seu domínio fixo conforme necessário. O fato do domínio ser fixo, faz com que a malha de MEF não mude durante o processo de otimização, o que simplifica muito os cálculos das derivadas de qualquer função definida sobre o domínio estendido.

O problema de otimização topológica considera uma função de distribuição de material que varia entre zero ou um dentro de um domínio fixo, representando ausência ou presença de material. O mais importante de se notar no método é o critério utilizado para variar a presença de material em um dado elemento discretizado entre zero e um e vice-versa. Este problema na sua forma discretizada não possui solução e tentativas de resolvê-lo irão resultar em soluções que dependem da discretização utilizada. Mas o problema pode ser relaxado, permitindo que o material assuma valores intermediários de propriedades durante a otimização, o que pode ser alcançado definindo um modelo de material. Essencialmente, o modelo de material aproxima a distribuição do material por uma função de parâmetros contínuos que, fisicamente, significaria a mistura de dois materiais ao longo do domínio. A função utilizada para fazer com que o material possa assumir valores intermediários durante a otimização é:

$$E = \rho^p E_0 \quad (3.42)$$

onde “ ρ ” é a pseudo-densidade e “ p ” é a penalização que contribui para que a estrutura recupere seu atributo discreto, evitando que sejam obtidos valores intermediários de densidade no final da otimização. Este modelo de material é chamado de SIMP (“Solid Isotropic Material with Penalization”). “ E ” e “ E_0 ” representam respectivamente o módulo de Young do material homogeneizado e do material básico que será distribuído no domínio.

3.4.1 Formulação do Problema de OT

A função objetivo do problema de otimização da estrutura da célula de carga envolve maximizar o potencial elétrico de saída ($\Delta\phi = \phi_{out2} - \phi_{out1}$), da Ponte de “Wheatstone” para certa carga aplicada no sensor. Contudo se apenas a maximização dessa saída fosse considerada seria obtida uma estrutura com baixa rigidez. Alguma rigidez deve ser ga-

rantida para que a estrutura suporte a carga aplicada sobre ela. Isso pode ser alcançado minimizando a flexibilidade média da estrutura, definida por:

$$C = \{U\}^t \{F\} = \{U\}^t [K] \{U\} \quad (3.43)$$

A flexibilidade média está relacionada com energia potencial de deformação elástica gerada no corpo quando este é submetido a esforços externos e sua teoria está definida dentro do campo de estudo da mecânica do meio contínuo.

A função objetivo, ao invés de maximizar somente a saída deve ser modificada para uma função que procure maximizar $\frac{\Delta\phi}{C}$. No entanto, essa função pode ser generalizada como:

$$F = \omega \log(\Delta\phi) - (1 - \omega) \log(C) \quad (3.44)$$

O coeficiente ω atua com uma função-peso que permite o controle entre a rigidez da estrutura do sensor e a saída. Neste trabalho as posições dos extensômetros são mantidas fixas, e o objetivo é encontrar a estrutura que obtenha a máxima resposta em voltagem, com o único limitante sendo o volume de material utilizado no domínio da estrutura do sensor.

3.5 Cálculo da Sensibilidade da Função Objetivo

O cálculo da sensibilidade da função objetivo é obtido de forma semelhante ao cálculo da própria função objetivo. As sensibilidades mecânicas, variações da flexibilidade média dada uma variação da pseudo-densidade de um elemento, e as sensibilidades da saída elétrica, variações da saída da ponte de *Wheatstone* dada uma variação da pseudo-densidade de um elemento são calculadas separadamente e compostas, de acordo com a derivada da função objetivo. Essa operação resultará em um vetor de sensibilidades que será utilizado como vetor gradiente no simplex.

3.5.1 Sensibilidade da Ponte de Wheatstone

O cálculo da sensibilidade da ponte de Wheatstone será utilizado no programa como entrada para a rotina que analisa as variações das pseudo-densidades de cada elemento do MEF. Deve-se lembrar que a única variável do problema é a pseudo-densidade em cada

elemento do domínio, então deve-se relacionar esse fator com a saída da ponte a fim de que sua sensibilidade possa ser calculada.

Definir-se-á antes uma estrutura de ponte de Wheatstone onde todos seus elementos estão relacionados com diferentes extensômetros (figura (8)) a fim de criar o modelo mais genérico possível, assim como foi implementado no software.

A saída da ponte é tomada como a diferença entre os potenciais V_1 e V_2 . Se admitido como I_1 a corrente que passa pelo lado da ponte onde o potencial V_1 é tomado, e I_2 a corrente que passa pelo lado da ponte onde o potencial V_2 é tomado, tem-se:

$$I_1 = \frac{V_{in}}{R_1 + R_2} \quad (3.45)$$

$$I_2 = \frac{V_{in}}{R_3 + R_4} \quad (3.46)$$

$$Saida = V_2 - V_1 = R_3 I_2 - R_2 I_1 \quad (3.47)$$

$$V_2 - V_1 = R_3 \frac{V_{in}}{R_3 + R_4} - R_2 \frac{V_{in}}{R_1 + R_2} \quad (3.48)$$

Cada R_i pode ser definido a partir daqui como uma função da deformação sofrida pelo elemento a qual ele está "colado", e essa definição torna-se muito conveniente, unindo o último elo que faltava do valor da saída da ponte com a única variável de projeto, a pseudo-densidade dos elementos.

A sensibilidade do valor da saída da ponte em relação a deformação dos elementos será calculada por,

$$\frac{d(Saida)}{d\varepsilon} = \frac{dV_1}{d\varepsilon} - \frac{dV_2}{d\varepsilon} = \quad (3.49)$$

$$V_{in} \frac{\frac{dR_2}{d\rho}(R_1 + R_2) - R_2(\frac{dR_1}{d\rho} + \frac{dR_2}{d\rho})}{(R_1 + R_2)^2} - V_{in} \frac{\frac{dR_3}{d\rho}(R_4 + R_3) - R_3(\frac{dR_4}{d\rho} + \frac{dR_3}{d\rho})}{(R_4 + R_3)^2} \quad (3.50)$$

com,

$$R_i = R_0 \frac{l + dl}{l} = R_0(1 + \varepsilon) \quad (3.51)$$

$$\frac{dR_i}{d\rho} = R_0 \frac{d\varepsilon}{d\rho} \quad (3.52)$$

Derivando a equação 3.37 em função das pseudo-densidades tem-se:

$$\frac{d\{\varepsilon\}_e}{d\rho} = [B]_e \frac{d\{U\}_e}{d\rho} \quad (3.53)$$

Para obter a derivada dos deslocamentos nodais em função das pseudo-densidades deriva-se a equação 3.41.

$$\frac{d[K]}{d\rho}\{U\} + [K]\frac{d\{U\}}{d\rho} = 0 \quad (3.54)$$

$$[K]\frac{d\{U\}}{d\rho} = -\frac{d[K]}{d\rho}\{U\} \quad (3.55)$$

$$\frac{d\{U\}}{d\rho} = -[K]^{-1}\frac{[K]}{\rho}\{U\} \quad (3.56)$$

O cálculo de $[K]^{-1}$ é muito custoso e é conveniente a introdução de uma manipulação matemática a fim de evitar este cálculo a cada iteração do programa. Determina-se uma matriz $[M]$ onde $[M]\frac{d\{U\}}{d\rho}$ contém as derivadas dos deslocamentos dos nós importantes para o cálculo da sensibilidade do sistema elétrico. Então $[M]$ é uma matriz com o número de linhas igual ao número de deslocamentos importantes para o cálculo da sensibilidade e o número de colunas igual ao número de graus de liberdade existentes. Cada linha possui apenas zeros salvo o índice da derivada dos deslocamentos que se deseja obter. Com isso a equação da derivada dos deslocamentos torna-se:

$$[M]\frac{d\{U\}}{d\rho} = -[M][K]^{-1}\frac{[K]}{\rho}\{U\} \quad (3.57)$$

Denominando $[M][K]^{-1}$ a uma matriz $[\lambda]$:

$$[M][K]^{-1} = [\lambda] \quad (3.58)$$

$$([K]^{-1})^t[M]^t = [\lambda]^t \quad (3.59)$$

$$[K]^t[\lambda]^t = [M]^t \quad (3.60)$$

O sistema obtido na equação 3.60 pode ser rapidamente resolvido a cada iteração do programa, e com isso a determinação das derivadas dos deslocamentos em função das

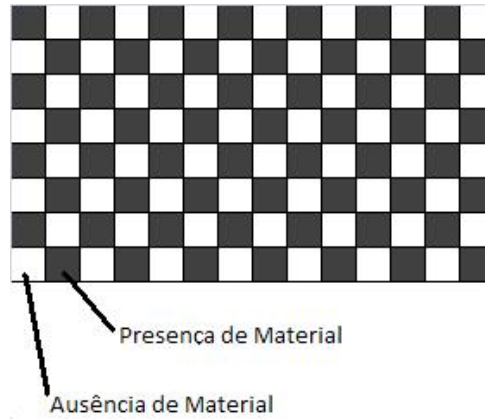


Figura 11: Ilustração do problema da “instabilidade do tabuleiro” numa estrutura

pseudo-densidade resulta em:

$$[M] \frac{d\{U\}}{d\rho} = -[\lambda] \frac{[K]}{\rho} \{U\} \quad (3.61)$$

3.6 Instabilidade de Tabuleiro

Há ainda a necessidade de uma técnica de filtragem que possibilita o controle da dependência da discretização e o problema do “instabilidade do tabuleiro”, comuns em problema de otimização topológica. O problema da “instabilidade do tabuleiro”, como ilustra figura 11, é a ocorrência de uma distribuição do material pelo domínio onde a forma se assemelha a de um tabuleiro, com ausências e presenças de material na seqüência de elementos do domínio.

Este problema surge devido a uma modelagem pobre do MEF, ao contrário do que se imaginava antes como sendo a estrutura otimizada [16]. Este problema é inerente a utilização de elementos de baixa ordem na malha de elementos finitos na modelagem do domínio. Estes elementos causam uma rigidez maior que aquela dada por uma distribuição normal uniforme do material.

Para solucionar este problema a primeira proposição feita seria o aumento do número de nós dos elementos do domínio, mas isso acarretaria um acréscimo significativo no custo computacional envolvido no problema. Uma segunda solução proposta seria a implementação de um filtro que controla o gradiente da variação espacial da densidade dos elementos, impedindo a formação de seqüências de presença e ausência completa de material.

Neste trabalho o filtro implementado é habilitado apenas em poucas iterações não sequenciais. Seu funcionamento se baseia no cálculo da diferença da densidade de um elemento em relação à média das densidades dos elementos vizinhos. Quando essa diferença é significativa, como no caso do problema da instabilidade do tabuleiro, o filtro altera os limites máximos ou mínimos que a densidade de cada elemento pode assumir no otimizador no sentido de diminuir essa diferença, forçando com que áreas de tabuleiro de xadrez sejam desmontadas e a massa realocada.

Este filtro, originalmente proposto por [14], baseia-se num esquema de filtragem que permite um controle simplificado da topologia encontrada durante o processo de otimização. Ele considera que o valor da densidade para os limites móveis dos elementos, utilizados como entrada do simplex, dependem das densidades dos elementos vizinhos, pela seguinte equação:

$$\rho_i = \frac{\rho_i V_i + w_1 \sum_j \rho_j V_j + w_2 \sum_k \rho_k V_k}{V_i + w_1 \sum_j V_j + w_2 \sum_k V_k} \quad (3.62)$$

Considerando isso, temos que o problema de otimização é definido como:

$$\text{Max } F = \omega \log(\Delta\phi) - (1 - \omega) \log(C)$$

γ

$$\text{Tal que: } \sum_{e=1}^{N_e} \gamma_e V_e \leq V_0$$

Equações de equilíbrio (Domínios mecânico e elétrico)

Técnica de filtragem

4 *Estrutura do Software*

Neste capítulo será apresentado de forma mais detalhada a estrutura do programa que implementa a solução apresentada nos itens anteriores.

Todo código foi escrito na linguagem do Matlab (“m-Files”) na versão 6.5.0 desta ferramenta, utilizando suas funções para solução de sistemas lineares esparsos e simplex (linprog). A entrada dos dados utiliza o Ansys, programa de sistema de análises por elementos finitos, como será visto adiante.

O programa foi estruturado de forma iterativa, como mostrado na figura 12, e pouco a pouco as variáveis de projeto convergem para uma solução gradualmente mais eficiente.

4.1 *Leitura dos Dados Iniciais*

O início da execução do programa ocorre com a leitura dos dados de entrada, que são as coordenadas dos nós do domínio estendido dividido em uma malha de MEF, além das constantes como a elasticidade do material do sensor, dados como o posicionamento dos extensômetros sobre o sensor e as cargas aplicadas. Todos os arquivos referentes aos dados de entrada estão na subpasta “Alimentador” do programa.

Para obter a geometria dos nós da malha do MEF é utilizado o Ansys, o domínio fixo estendido é desenhado e “malhado” (*meshed*). O resultado deste processo é exportado para um arquivo texto, contendo a informação do posicionamento dos nós bem como a inter-relação de cada um deles com as subdivisões (elementos do MEF) criadas. Para este trabalho é preferível a utilização deste recurso à construção da própria malha de MEF no programa porque o Ansys possui um algoritmo interno que cria a malha do MEF de forma mais eficiente, evitando pontos de singularidade. Estas informações são armazenadas nos arquivos “CoordenadasDosNos.txt” e “Elementos.txt”.

Todas as constantes de entrada são carregadas através de um “m-file” do Matlab e podem ser alteradas no arquivo “Entradas.m”.

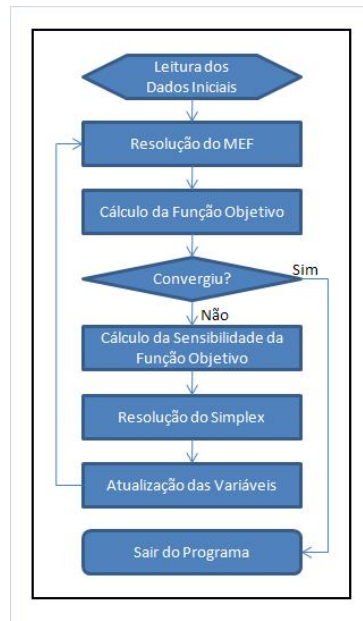


Figura 12: Fluxo do programa

As cargas aplicadas, bem como os graus de liberdade nas quais elas são aplicadas, estão definidas no arquivo “CargaAplicada.txt”. Os dados devem ser colocados de forma que cada linha corresponda à informação de uma carga aplicada, no seguinte formato: “[Grau de liberdade][“TAB”][Carga aplicada]”. O grau de liberdade para um nó “n” é $2n - 1$ para o grau de liberdade “x” e $2n$ para o grau de liberdade “y”.

A fim de evitar pontos de singularidades (como divisões próximas a zero ou concentrações de tensões) é conveniente fixar que determinados elementos devem forçadamente ter sua pseudo-densidade igual a “1” sempre. Os exemplos mais comuns de elementos sob estas características são os elementos localizados à volta do nó onde a carga é aplicada e aqueles em que pelo menos um dos nós possui um extensômetro colado. A lista destes elementos fixos encontra-se no arquivo “ElementosFixos.txt” e cada linha deve contar a informação do número do elemento que se deseja fixar.

Para que o sistema seja real e possa ser resolvido é necessário que a topologia da célula de carga esteja fixa em alguns pontos (do contrário a célula se moveria com a carga aplicada ao invés de se deformar). Estes pontos são escolhidos como nós da própria malha do MEF. A lista destes pontos é preenchida no arquivo “GrausDeLiberdadeFixos.txt” e cada linha deve conter a informação de um nó fixo do sistema.

Por último deve-se especificar para o software a posição onde cada extensômetro está, definindo para cada extensômetro os nós onde sua estrutura é fixada. Esta informação está localizada no arquivo “NosDosExtensometros.txt”, onde cada linha é preenchida com

o número dos nós separados por “tab”, representando um extensômetro.

4.1.1 Pré-Cálculo da Matriz de Rigidez

Para a solução do MEF, é necessário o cálculo da matriz de rigidez de cada elemento, primeiramente criando a matriz de rigidez elemento a elemento e depois integrando todos estes valores na matriz que irá compor o sistema linear do problema. O cálculo destas matrizes de rigidez é computacionalmente muito custoso e é importante evitar que ele seja feito a cada ciclo do programa.

Para tal, no fim da etapa de leitura de dados iniciais, é chamada uma função que realiza o pré-cálculo de todas as matrizes de rigidez de cada elemento, apenas faltando o produto pela constante do material, que varia de acordo com a pseudo-densidade do elemento. Estes dados são armazenados em uma matriz tridimensional e são invocados posteriormente para compor a matriz do sistema linear que resolve o MEF.

4.2 Resolução do MEF

Este é o primeiro passo dentre as etapas que compõe o ciclo fechado do software. Nesta etapa o software utiliza os valores correntes das pseudo-densidades de cada um dos elementos (i.e. o estado atual da otimização), juntamente com a matriz de pré-cálculo da rigidez dos elementos para compor o sistema linear para a solução do MEF. Após a composição deste sistema linear as condições de contorno são aplicadas (carga e nós fixos) e só então o sistema é resolvido.

Vale lembrar que existe o cuidado de manter o sistema simétrico para diminuir o tempo de obtenção da solução do sistema linear. Além disso é possível verificar que a matriz do sistema linear contém muitos elementos com valor zero, sendo conveniente armazená-la de forma esparsa.

4.3 Cálculo da Função Objetivo e Convergência

Após a resolução do MEF o software realizará o cálculo das funções objetivo. A função objetivo será o indicador de quanto um resultado está melhor que o obtido no ciclo de otimização anterior como será visto a seguir.

Com o resultado do MEF é possível calcular a flexibilidade média da estrutura (*mean*

compliance) que significa o quanto a estrutura cede ao esforço da carga aplicada. O objetivo aqui é minimizar a flexibilidade média, tornando a estrutura o mais rígida possível. A flexibilidade média é o primeiro componente da função objetivo.

O segundo componente da função objetivo é a saída elétrica dos extensômetros ligados em ponte de *Wheatstone*. De posse dos resultados do MEF, isto é, dos valores dos deslocamentos resultantes da carga aplicada para cada um dos nós é possível realizar o cálculo da variação de comprimento dos extensômetros e assim compor a ponte de *Wheatstone* e obter a diferença dos potenciais V_1 e V_2 entre os terminais de leitura como mostra a figura 8.

Os valores das componentes da função objetivo podem ser relacionados por meio de uma única equação, visando maximizar a saída da ponte e minimizar a flexibilidade média. O valor obtido será utilizado para comparar os resultados dos ciclos consecutivos.

A cada ciclo, a partir do terceiro, o software analisa a variação da função objetivo. Se detectado uma pequena variação o software entende que o problema convergiu e apresenta os resultados finais, caso contrário ele inicia uma nova etapa de cálculo de sensibilidades e resolução do problema de otimização que resultará na nova configuração da topologia da célula de carga como será visto a seguir.

4.4 Simplex

Ao final desta etapa o software terá obtido um novo conjunto de pseudo-densidades dos elementos, segundo os gradientes (sensibilidades) obtidos na etapa anterior. Uma vez obtido um novo conjunto de pseudo-densidades o software reinicia o ciclo, atualizando as variáveis de projeto e retornando à etapa de cálculo do MEF.

Para o cálculo do simplex é necessário determinar os limites móveis dentro dos quais as pseudo-densidades dos elementos podem variar nesta iteração do software. A especificação de valores relativamente largos para estes limites móveis gera flutuações não desejadas na solução e os resultados podem ser corrompidos.

Neste ponto são estabelecidos as como “1” os limites móveis máximo e mínimo de determinados elementos chaves (como um ponto de aplicação de carga) evitando problemas de concentração de tensão ou divisões por zero. A especificação correta destes limites também assegura que um elemento não assuma uma pseudo-densidade negativa ou maior do que 1.

5 *Resultados*

Neste capítulo serão apresentados os resultados que puderam ser obtidos com o uso do software. Além disso, os resultados aqui apresentados servirão como base de compreensão para futuros trabalhos que possam ser feitos a partir deste.

Primeiramente será mostrada uma execução do software com a função objetivo voltada apenas para a componente mecânica da estrutura, visando apenas minimizar a flexibilidade média sem importar com a saída elétrica. A verificação deste resultado é importante para confirmar numericamente que a estrutura de resolução do MEF mecânico, o cálculo da sensibilidade mecânica e o cálculo do simplex estão corretamente implementados.

Após esta primeira etapa serão apresentados e comparados os resultados de execuções que diferem em algumas constantes como grau de refinamento da malha ou peso atribuído à componente elétrica do sistema.

5.1 Exemplo 1

Este primeiro exemplo apresenta o resultado da otimização estrutural que o software pode executar. Para tal será desconsiderada a parte elétrica, ou seja, a função objetivo terá peso um para a componente mecânica e zero para a componente elétrica. O volume máximo ocupado é de 35% do volume total.

Este primeiro resultado mostra que, como esperado, a estrutura obtida visando somente à minimização da flexibilidade média é semelhante a uma estrutura treliçada, muito utilizada em aplicações mecânicas desde pequena até largas escalas, pois com relativamente pouca massa consegue-se alta rigidez mecânica, ainda sim este resultado não é satisfatório. Como o processo de otimização envolve uma discretização do espaço o problema é passível obter estruturas em que aparecem uma “instabilidade de tabuleiro”, como pode ser visto na figura (14).

Em vista deste problema é conveniente introduzir no software uma solução que elimine

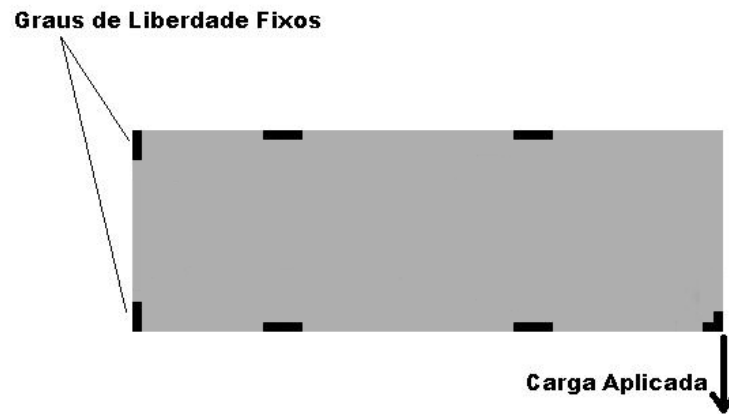


Figura 13: Exemplo 1 - Estado Inicial.

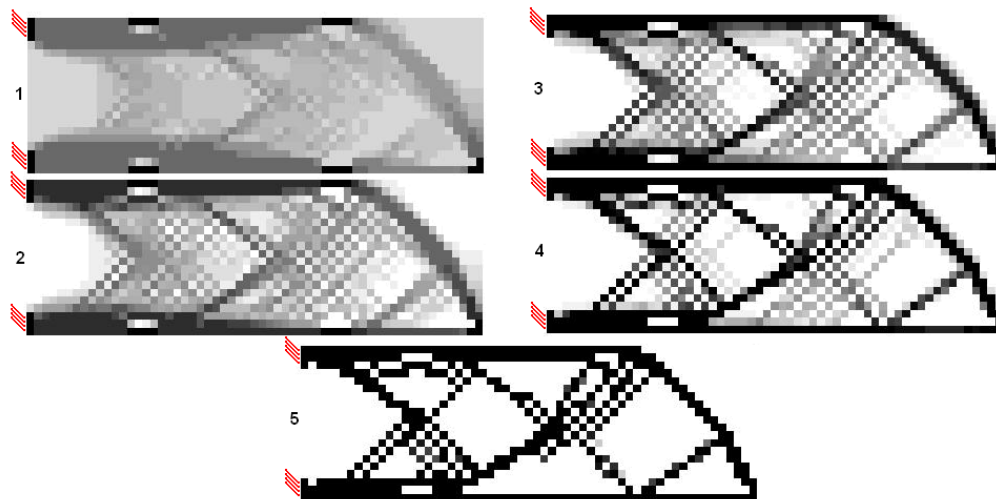


Figura 14: Exemplo 1 - Vizualização passo a passo da obtenção do resultado da OT.

a instabilidade de tabuleiro, e para isso implementou-se um filtro. Próximo ao final do processo de otimização, verificá-se se a estrutura obtida é formada por áreas com este tabuleiro através da comparação da massa de cada elemento com a massa média dos elementos adjacentes. As áreas encontradas são então forçadas a serem desmanchadas, fazendo com que um elemento troque massa com os elementos próximos e o software inicia uma nova iteração. Com algumas iterações é esperado que o filtro elimine todas as partes da estrutura em tabuleiro de xadrez.

Para este exemplo, apresenta-se a seguir as curvas das variações da função objetivo, volume total da estrutura e flexibilidade média, figura(15).

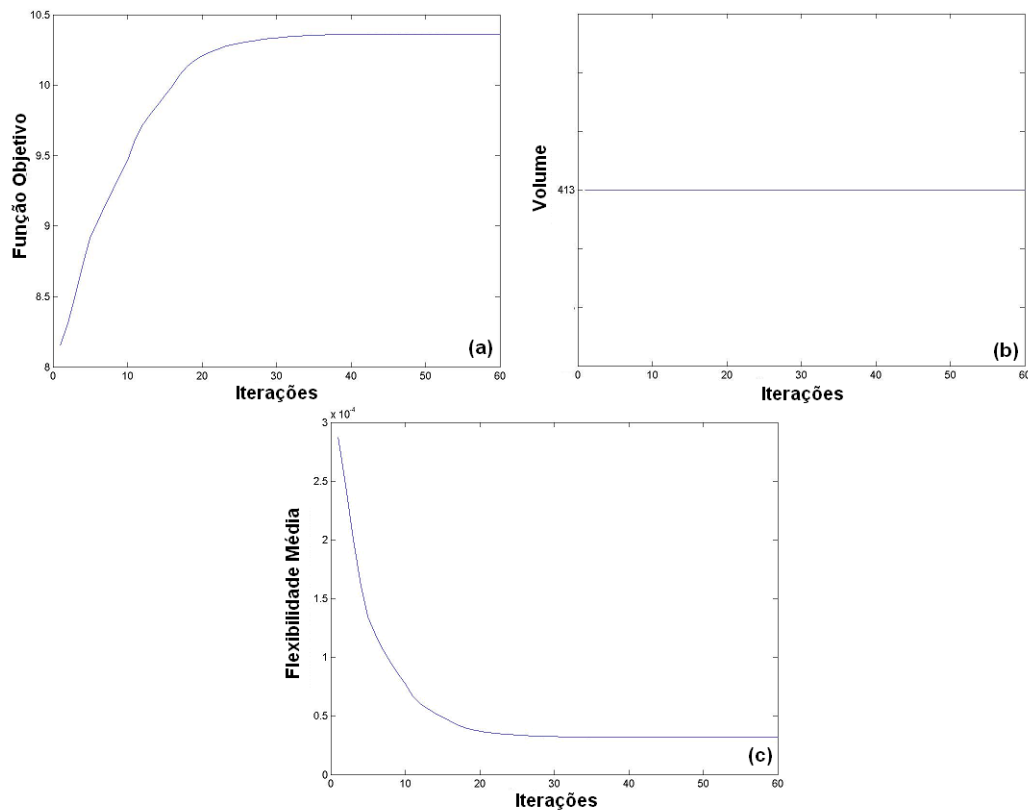


Figura 15: Exemplo 1 - Gráficos da função objetivo (a), volume total ocupado (b) e flexibilidade média da estrutura (c).

5.2 Exemplo 2

O segundo exemplo apresentado será um caso de execução do software exatamente igual ao caso anterior, porém com a utilização do filtro que elimina as áreas em formato de tabuleiro de xadrez. Como o filtro somente é utilizado próximo ao fim do processo de

otimização a forma que a estrutura assume ao decorrer das iterações é idêntica à forma sem o filtro, mudando apenas nos resultados das últimas iterações. A figura (16) mostra o resultado final deste exemplo.

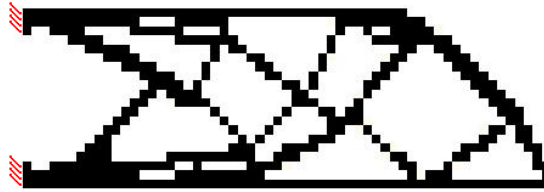


Figura 16: Exemplo 2 - “Exemplo 1” com a utilização de filtro.

Como esperado, a forma obtida neste exemplo é bem semelhante a obtida no primeiro exemplo. As áreas onde havia incidências de formas em tabuleiro foram desmanchadas e a topologia assumiu um formato mais viável de ser construído. O custo de obtenção desta forma pode ser comparado observando os gráficos das funções objetivo e flexibilidade média. Como a função objetivo ainda é função apenas da flexibilidade média da estrutura apenas há necessidade de comparar um dos dois dados.

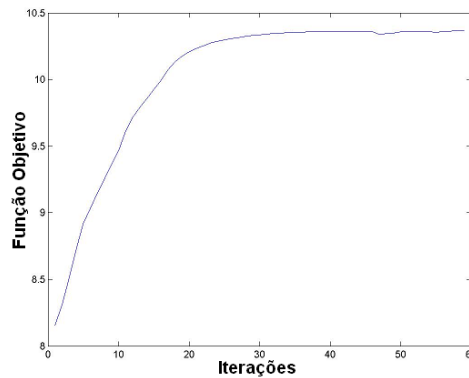


Figura 17: Exemplo 2 - Função objetivo.

Para este segundo exemplo, no resultado final tem-se o valor de $3,1697 \times 10^{-5}$ para a flexibilidade média enquanto que para o exemplo anterior o valor obtido é de $3,1617 \times 10^{-5}$. Isso mostra que a diferença entre estes dois valores pode ser considerada desprezível mediante o ganho obtido com a produção de uma topologia criada com a utilização do filtro. Além disso, a quantidade de tempo necessária para se obter o resultado sofreu poucas mudanças (neste caso, o acréscimo de 2 iterações). Este comportamento será estudado mais adiante quando introduzidos exemplos onde a componente elétrica é levada em conta.

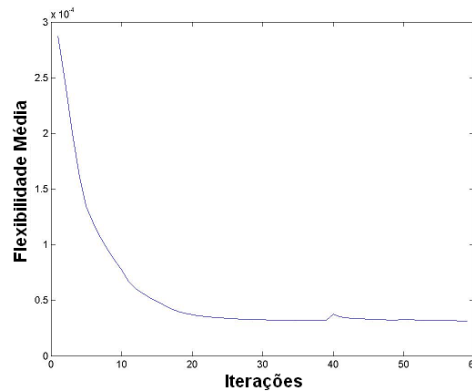


Figura 18: Exemplo 2 - Flexibilidade média.

5.3 Exemplo 3

Como descrito anteriormente o modelo de material utilizado é definido de forma a auxiliar a obtenção de um resultado final onde a topologia do sensor fosse composto apenas pela presença ou ausência de material, evitando áreas de pseudo-densidades intermediárias. Para isso, durante o processo de otimização é aplicado sobre a pseudo-densidade, variável de projeto, uma penalização onde seu valor torna-se mais influente no cálculo da sensibilidade.

Quando próximo a um resultado estável, isto é, quando nota-se pouca variação relativa da função objetivo o software opta por incrementar o valor desta penalização sobre a pseudo-densidade dos elementos, acelerando o processo de tornar a topologia do sensor discreta.

Os resultados anteriores utilizaram a variação relativa da função objetivo de 0,1%. Neste exemplo são mostrados dois resultados onde o valor da variação relativa da função objetivo para incrementar a penalização é diminuído e aumentado, respectivamente para 0,01% e 1%. Para estes exemplos a função objetivo ainda considera apenas a diminuição da flexibilidade média da estrutura, ignorando a saída elétrica da ponte.

A primeira grande diferença é a variação da quantidade de iterações que o software executa antes que encontre o resultado final. Enquanto o caso que utiliza a variação de 1% utilizou 34 iterações o caso com 0,01% de variação exigiu 101 iterações, quase o triplo do tempo de execução. Ambas as variações são bem significativas comparadas ao segundo exemplo que exigiu em torno de 60 iterações.

Outra grande diferença encontrada é a forma final da topologia da estrutura obtida.

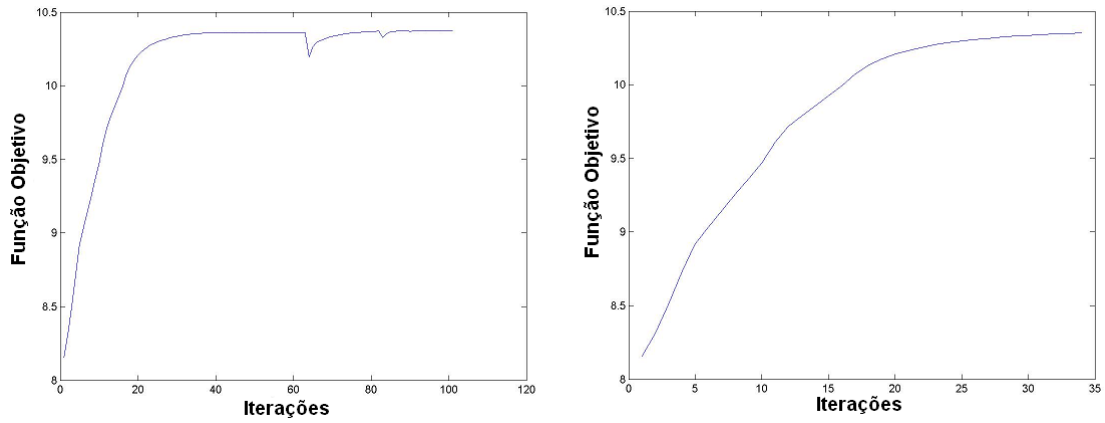


Figura 19: Exemplo 3 - Funções objetivo. Variação relativa de 0,01% (à esquerda) e variação relativa de 1% (à direita).

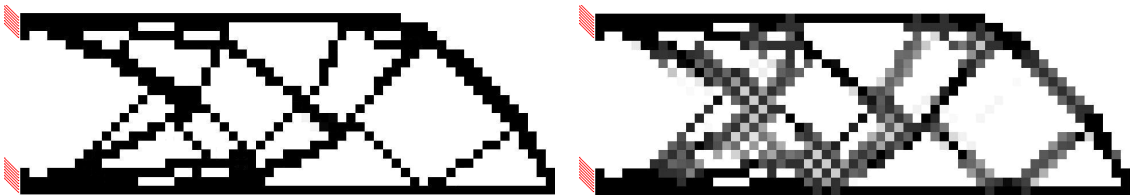


Figura 20: Exemplo 3 - Resultados finais. Variação relativa de 0,01% (à esquerda) e variação relativa de 1% (à direita).

O caso de utilização de variação de 1% fez com que o software decidisse parar antes que a forma final estivesse completamente discreta, como pode ser visto na figura(20). A obtenção de uma forma não-discreta inviabiliza o resultado, visto que uma estrutura com graduações de densidade não é fácil de ser produzida.

Comparativamente as funções objetivos não são tão diferentes, enquanto a função objetivo com a variação de 0,01% resulta no valor de 10,377, tem-se que a variação de 1% resulta no valor de 10,351 para a função objetivo.

5.4 Exemplo 4

Na tentativa de diminuir o tempo de execução do software sem comprometer os resultados finais este exemplo apresenta um caso onde é utilizado o valor de 1% para a variação relativa da função objetivo como critério para aumentar a penalização. Este valor será utilizado até que a penalização atinja o valor 3, quando a variação assume um valor mais baixo, igual à 0,1%, isso procura evitar que a estrutura final assuma uma forma não-discreta.

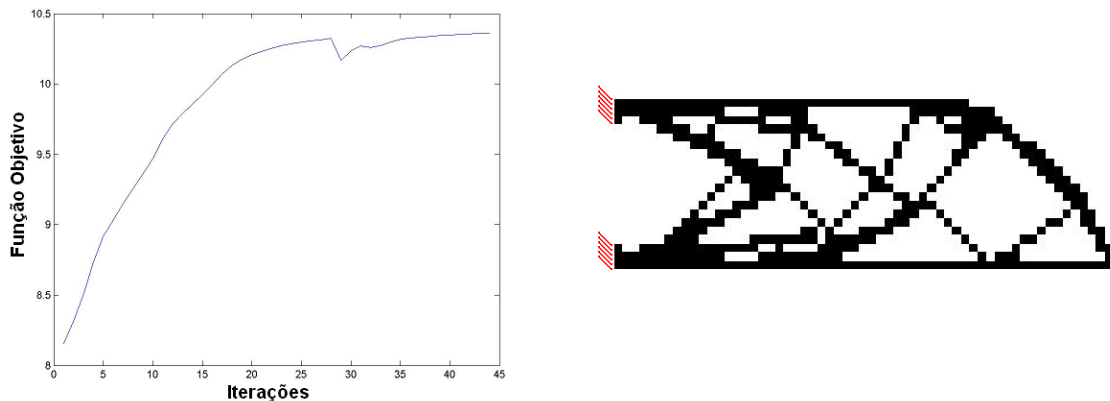


Figura 21: Exemplo 4 - Função objetivo (à esquerda) e resultado final (à direita).

Como observado na figura 21 a forma obtida é quase idêntica à forma obtida no exemplo 2, porém foram necessárias apenas 44 iterações, cerca de 25% menos tempo de processamento. A função objetivo também não sofre grandes alterações, resultando no valor de 10,361.

5.5 Exemplo 5

Este exemplo será o primeiro caso onde é introduzido a componente elétrica da função objetivo, com o peso de 50%. Seus resultados são a base para os consecutivos exemplos que seguirão. A partir deste caso é importante notar que o tempo de processamento de cada iteração aumenta, uma vez que é necessário o cálculo da sensibilidade da componente elétrica, o que torna interessante o controle do valor adotado para a variação relativa da função objetivo como critério para aumentar a penalização, descrito no exemplo 4. Para este refinamento de malha o tempo de cada ciclo de cálculo das sensibilidades subiu de uma média de 2 minutos e 20 segundos para 4 minutos e 20 segundos.

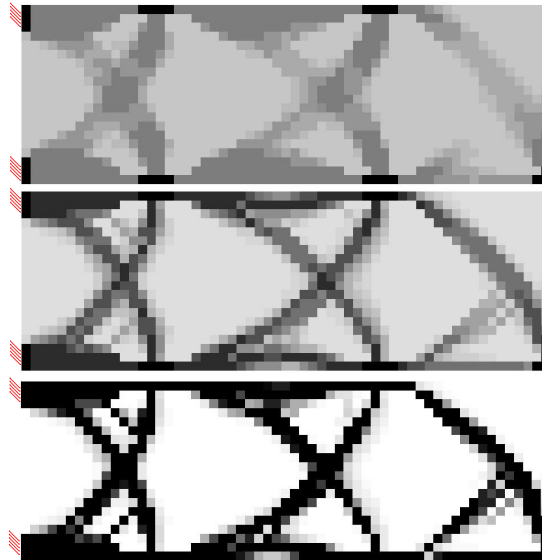


Figura 22: Exemplo 5 - Passos intermediários da obtenção do resultado de OT.

A figura(23) representa a topologia obtida para a célula de carga pelo software. Estão indicados na figura também a região onde há extensômetros colados. ‘F’ é a força aplicada sobre o sensor.

Os valores finais obtidos são:

- Flexibilidade Média $5,894 * 10^{-5}$
- Módulo do Potencial Elétrico $1,9032 * 10^{-4}$
- Função Objetivo 0,5861

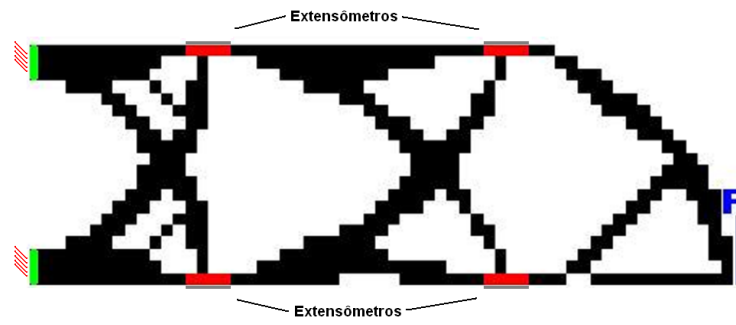


Figura 23: Exemplo 5 - Resultado final da OT.

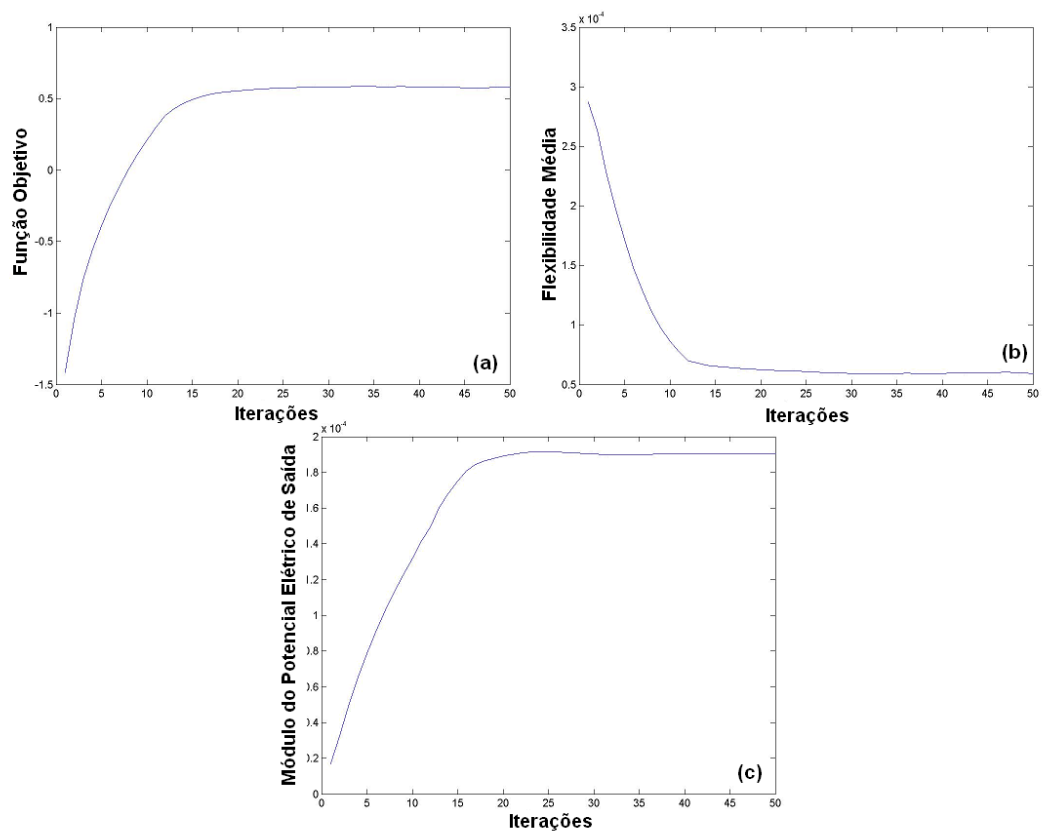


Figura 24: Exemplo 5 - Gráficos da função objetivo (a), flexibilidade média (b) e módulo do potencial elétrico de saída (c).

5.6 Exemplo 6

O exemplo 6 possui dados de entrada semelhantes ao exemplo 5, diferindo na quantidade de elementos que compõe a malha do MEF. Enquanto o exemplo anterior utiliza apenas 1080 elementos este exemplo utiliza 2520 elementos. Como esperado com a utilização de uma malha mais refinada a estrutura, ainda com uma forma semelhante à anteriormente obtida, possui um desenho mais suave e mais próximo do formato real o qual deveria ser produzido, como mostra a figura(25). Com isso espera-se que o resultado encontrado para a flexibilidade média e o potencial de saída sejam mais próximos aos valores reais que podem ser obtidos.

O principal custo por utilizar uma malha com mais elementos é o tempo de processamento, apesar deste caso de uso percorrer 43 iterações, cada iteração custou cerca de 23 minutos. Observe que este exemplo não pode ser usado para a comparação da variação do resultado do potencial elétrico de saída, uma vez que com a mudança da malha do MEF os extensômetros não estão colados nas mesmas posições sobre a topologia da estrutura. O exemplo seguinte fará mostrar a diferença encontrada no resultado da flexibilidade média da estrutura para apenas o processo de otimização estrutural.

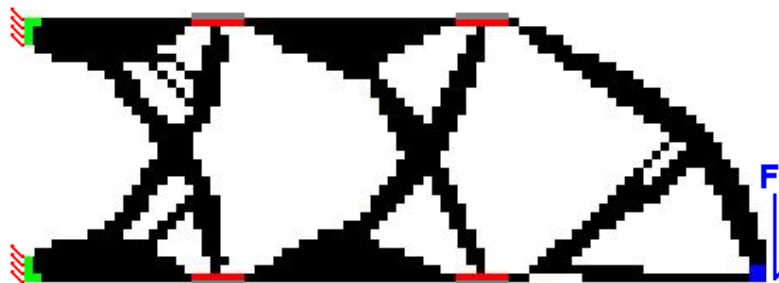


Figura 25: Exemplo 6 - Resultado final da OT.

Os valores finais obtidos são:

- Flexibilidade Média $6,062 * 10^{-5}$
- Módulo do Potencial Elétrico $2,6302 * 10^{-4}$
- Função Objetivo 0,7382

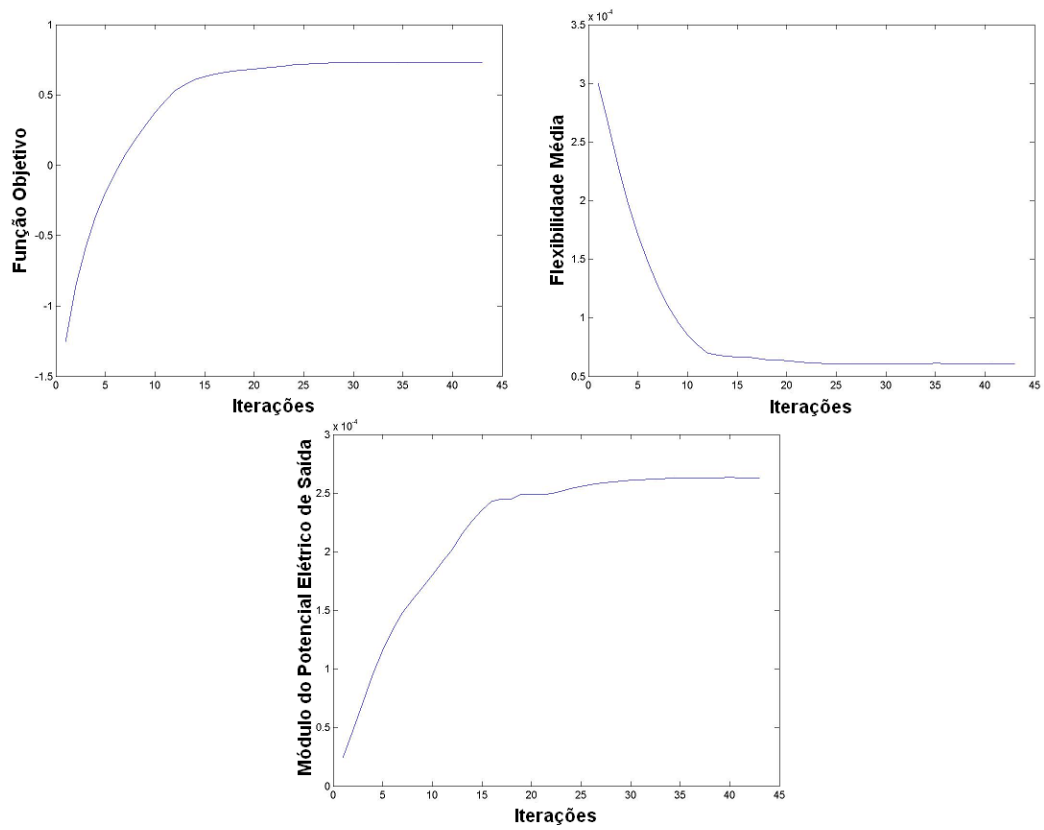


Figura 26: Exemplo 6 - Gráficos da função objetivo (a), flexibilidade média (b) e módulo do potencial elétrico de saída (c).

5.7 Exemplo 7

Mostrado no exemplo anterior as diferenças significativas na topologia e no custo em tempo do processo de otimização com a variação do número de elementos utilizados para compor a malha do MEF torna-se interessante a comparação da variação dos resultados obtidos para a flexibilidade média, apontando o quão significativo pode ser a margem de diferença de acordo com este aumento. Este exemplo mostra um caso de otimização onde apenas a componente mecânica é levada em conta, podendo ser comparado com o resultado obtido no exemplo 2 que utiliza as mesmas condições salvo o número de elementos da malha.

A componente elétrica será ignorada neste exemplo, pois com a variação do número de elementos na malha torna-se difícil acoplar sobre a mesma posição os extensômetros, visto que além dos nós de ambas as malhas não coincidirem o extensômetro estaria acoplado a mais elementos, influenciando significativamente o tempo de processamento.



Figura 27: Exemplo 7 - Resultado final da OT.

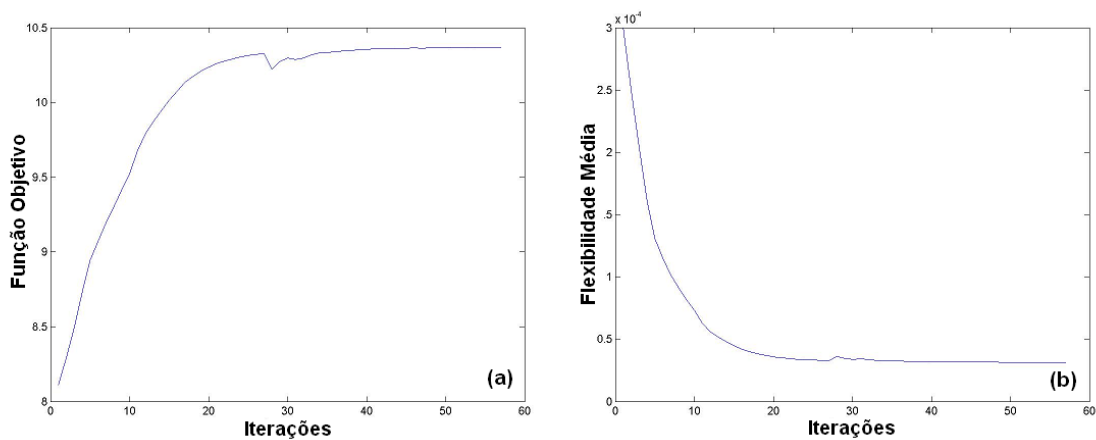


Figura 28: Exemplo 7 - Gráficos da função objetivo (a) e flexibilidade média (b).

Para este caso de otimização valores finais obtidos, e os respectivos valores percentuais

de diferença em relação aos resultados com uma malha de menor resolução, são:

- Flexibilidade Média $3,140 * 10^{-5}$; $3,16 * 10^{-6}\%$ de diferença em relação ao resultado do exemplo 2 ($3,144 * 10^{-5}$)
- Função Objetivo 10,369; $9,6 * 10^{-3}\%$ de diferença em relação ao resultado do exemplo 2 (10,368)

Conclui-se que as variações nos resultados obtidos têm diferenças pouco significativas sobre a flexibilidade média, o que significa que o ganho com a melhora na definição da estrutura não altera significativamente os valores da função objetivo. Essa conclusão pode ser estendida para um caso com a utilização da componente elétrica, com a ressalva de que os extensômetros tenham o mesmo tamanho e posição sobre a topologia do sensor. O resultado desta comparação também é útil para concluir que é possível e viável a utilização de malhas de relativa baixa resolução para a obtenção dos resultados possíveis para função objetivo, bem como obter uma idéia próxima do formato que a célula de carga irá assumir, e só então de posse de resultados viáveis e interessantes realizam-se testes com malhas mais refinadas.

5.8 Exemplo 8

Este exemplo mostra um caso de otimização com 50% de peso para a componente elétrica na função objetivo utilizando uma malha mais refinada de MEF. Observa-se que a forma estrutural é muito semelhante, porém não idêntica, ao caso já mostrado, com 50% de peso para a componente elétrica; como pode ser visto na figura (29), algumas partes da estrutura antes planas começam a adquirir uma forma arredondada.

Para este caso de otimização valores finais obtidos são:

- Flexibilidade Média $6,062 * 10^{-5}$
- Função Objetivo 0,7338
- Módulo do Potencial Elétrico $2,6327 * 10^{-4}$

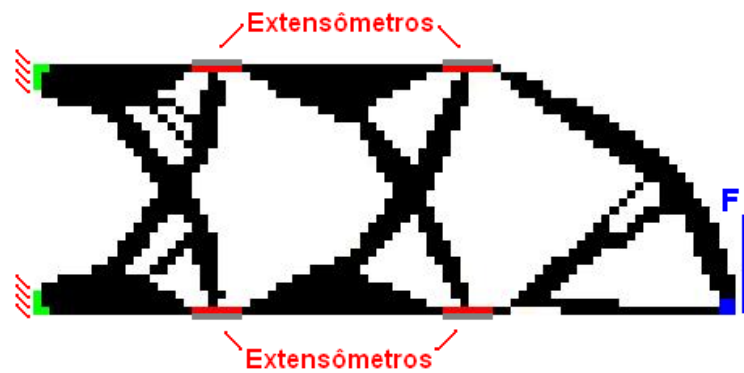


Figura 29: Exemplo 8 - Resultado final da OT.

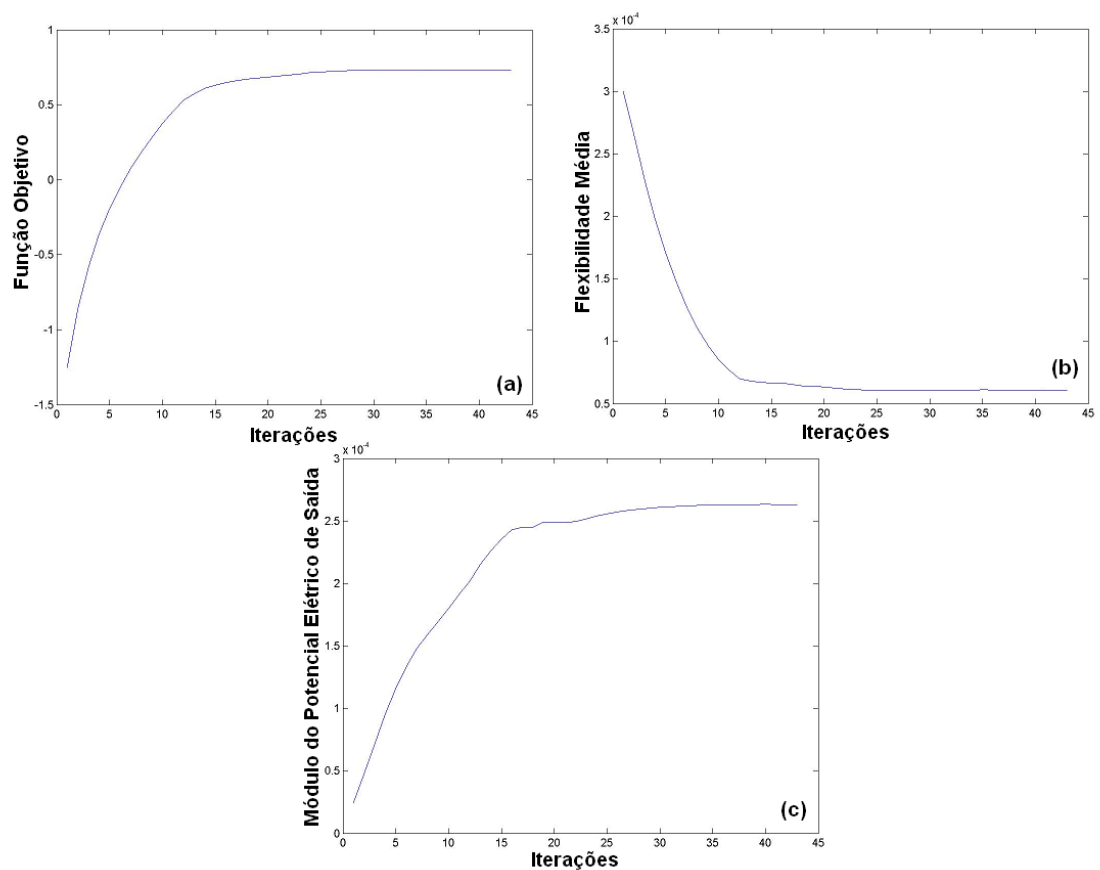


Figura 30: Exemplo 8 - Gráficos da função objetivo (a), flexibilidade média (b) e módulo do potencial elétrico de saída (c).

5.9 Exemplo 9

O exemplo 9 objetiva mostrar que a aplicação de cargas sobre a topologia do sensor pode ser feita de maneira arbitrária. Para este caso são aplicadas duas forças que resultam em uma flexão sobre a topologia do sensor. A figura (31) apresenta o resultado desta aplicação.

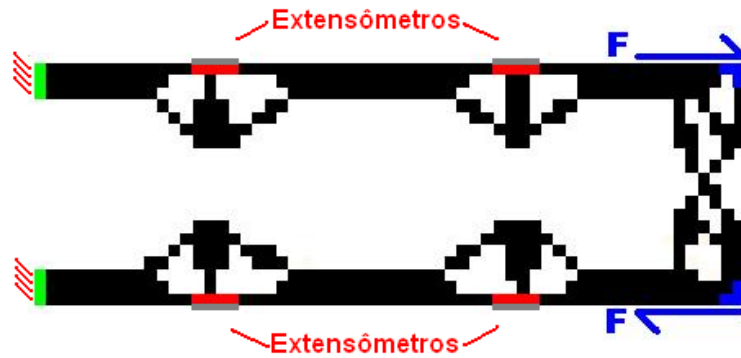


Figura 31: Exemplo 9 - Resultado final da OT.

Para este caso de otimização valores finais obtidos são:

- Flexibilidade Média $1,181 \times 10^{-5}$
- Função Objetivo 0,7615
- Módulo do Potencial Elétrico $5,4136 \times 10^{-4}$

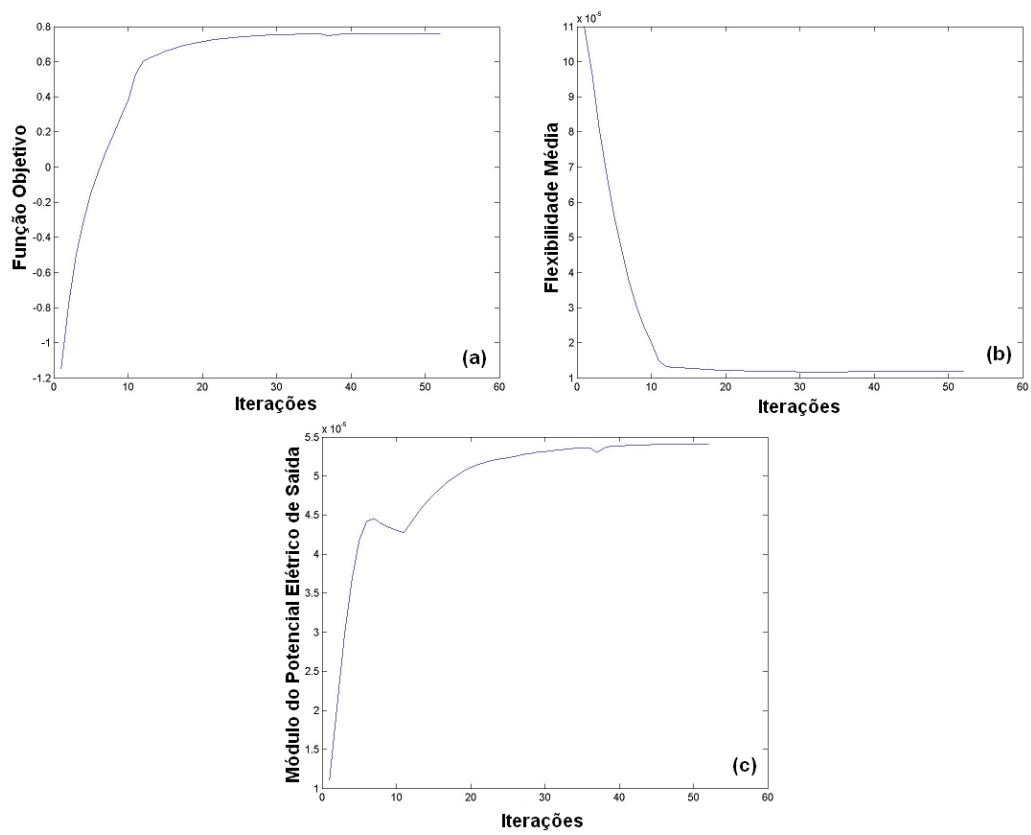


Figura 32: Exemplo 9 - Gráficos da função objetivo (a), flexibilidade média (b) e módulo do potencial elétrico de saída (c).

6 *Conclusões*

O software desenvolvido neste trabalho mostrou-se eficiente para o desenvolvimento em duas dimensões da topologia de uma célula de carga de extensômetros. Sua utilização ainda se limita às cargas aplicadas sobre um único plano, mas existe a possibilidade de extensão do software, além do escopo deste trabalho, para um espaço tridimensional. Vale lembrar ainda que as formas obtidas precisam ser interpretadas antes de serem produzidas, pois o processo de otimização por malhas de MEF aqui utilizado não atenta a fatores reais como cantos vivos e concentradores de tensão. Objetivando minimizar as possíveis propagações de erros que possam ocorrer com a interpretação dos resultados para uma forma real é conveniente que sejam utilizadas malhas com maior número de elementos possível.

Como incentivo a futuros desenvolvimentos sobre este projeto, este trabalho possui anexo o código fonte de todo o software desenvolvido e sua utilização é livre.

Referências

- [1] ALFA INSTRUMENTOS. Apresenta recursos e produtos desenvolvidos. Disponível em <<http://alfainstrumentos.com.br>>. Acesso 15 jun 2005
- [2] ATI INDUSTRIAL AUTOMATION. Apresenta recursos e produtos desenvolvidos. Disponível em <http://www.ati-ia.com/products/ft/applications/robotic.aspx>. Acesso 10 de jun 2005.
- [3] BATHE, K.J. **Finite Elements Procedures**. Prentice Hall, New York, EUA, 1996
- [4] BENDSOE, M.P. **Optimization of Structural Topology, Shape and Material**, Springer, Berlin, 1995
- [5] BENDSOE, M.P., SIGMUND, O. **Topology Optimization**, Springer, Berlin, 2003
- [6] BLAKEBOROUGHT, A. ,CLÉMENT, and D. WILLIAMS **Novel Load Cell for Measuring Axial Force, Shear Force, and Bending Movement in Large-scale Structural Experiments**, Oxford, University of Oxford, Department of Engineering Science, 2001
- [7] BRUNS, T. E.; **Topology Optimization by Penalty (TOP) Method**, University of Illinois at Urbana-Champaign, Illinois,
- [8] CHAO, L. P.; CHEN, K. T.; **Shape Optimal Design and Force Sensitivity Evaluation of Six-Axis Force Sensors**, Department of Mechanical Engineering, Taiwan, 1997
- [9] KIN, J.H., KANG, D.I., and SHIN, H.H. **Design and Analysis of a Column Type Multi-component Force/Moment Sensor**, Division of Physical Metrology/Mass and Force Group, South Korea, 2002
- [10] MOAVENI, SAEED; **Finite Element Analysis - Theory and Application with ANSYS**, Prentice Hall, New Jersey, 1999
- [11] SIGMUND, O. **A 99 Line Topology Optimization code Written in Matlab**, Springer, Department of Solid Mechanics of Technical University of Denmark, 1999
- [12] SILVA, E. C. N.; SOUZA, B. R. D.; NIGHIWAKI, S.; **Piezoresistive Sensor Design Using Topology Optimization**, São Paulo, Departamento de Mecatrônica e Sistemas Mecânicos
- [13] SILVA, J.G., CARVALHO, A.A., and SILVA, D.D. **A Strain Gauge Tactile Sensor for Finger-mounted Applications**, Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade de São paulo, São Paulo, Brasil, 2001

- [14] SWAN, C., KOSAWA, I. **Voigt-Ress Topology Optimization for Structures with Linear Elastic Material Behaviour**, International Journal of Numerical Method in Engineering, 1997, Vol. 40, No. 1, pp.3033-5057.
- [15] WANG, M.Y; PENG, W.;**Topology Optimization Using Level Set Method Incorporating Topological Derivative**, Hong Kong, Department of Automation & Computer-Aided Engineering
- [16] Zhou M., Shy Y.K. e Thomas H.L.; **Checkerboard and Minimum member Size Control in Topology Optimization**, 2001.